

Compito di Matematica per la Fisica
Silvia Penati, Carlo Oleari
17/9/2013

1. Calcolare modulo e fase dei seguenti numeri e disegnarli nel piano complesso

- $\log \left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{1+i} \right]$
- $\exp [i \cos(1+i)]$

2. Applicando le proprietà generali della trasformata di Fourier \mathcal{F} , calcolare $\mathcal{F}(f)$ per

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x+3)^2}$$

3. Calcolare, utilizzando la teoria dei residui, l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{4 + \cos \theta}$$

4. Data la funzione

$$f(z) = \frac{(z-a) \sin \frac{z}{2}}{1 - \cos z}, \quad a \in \mathbb{C}$$

- Si identifichino e si classifichino tutti i punti singolari (non dimenticare la discussione del punto all'infinito) al variare del parametro complesso a .
- Si calcolino i residui nei punti singolari al finito.

5. Sia A l'operatore in $L^2(a, b)$ con $0 < a < b$ tale che

$$(Af)(x) = \frac{i}{2} \left[\frac{d}{dx} + \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} x^2 \right] f(x)$$

definito per ogni funzione f assolutamente continua con $f' \in L^2(a, b)$, e tale che

$$af(a) = bf(b)$$

Determinare lo spettro di A .

Suggerimento: risolvere il problema agli autovalori con il cambio di funzione $f(x) = x^\alpha g(x)$, per un opportuno valore di α , da determinare. Assicurarsi che la trasformazione sia ben definita nell'intervallo di definizione della funzione.